



MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 6 de mayo de 2010 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

0	0							
---	---	--	--	--	--	--	--	--

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 7]

En la siguiente tabla se muestran las calificaciones obtenidas por 120 alumnos en un examen.

Calificación	Número de alumnos	Frecuencia acumulada
1	9	9
2	25	34
3	35	p
4	q	109
5	11	120

(a) Halle el valor de

(i) p ;

(ii) q .

[4 puntos]

(b) Halle la media de las calificaciones.

[2 puntos]

(c) Escriba el valor de la desviación típica.

[1 punto]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 6]

Sea una progresión aritmética u_1, u_2, u_3, \dots , donde $d = 11$ y $u_{27} = 263$.

(a) Halle u_1 . [2 puntos]

(b) (i) Sabiendo que $u_n = 516$, halle el valor de n .

(ii) Para este valor de n , halle S_n . [4 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 5]

Jan inventa un juego, que consiste en tirar dos dados equilibrados de 6 caras. Gana un premio si, al sumar las puntuaciones que saca con cada dado, el total es igual a 5.

(a) Jan tira los dos dados una vez. Halle la probabilidad de que gane un premio. [3 puntos]

(b) Jan tira los dos dados 8 veces. Halle la probabilidad de que gane 3 premios. [2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 6]

Halle el término en x^4 del desarrollo de $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

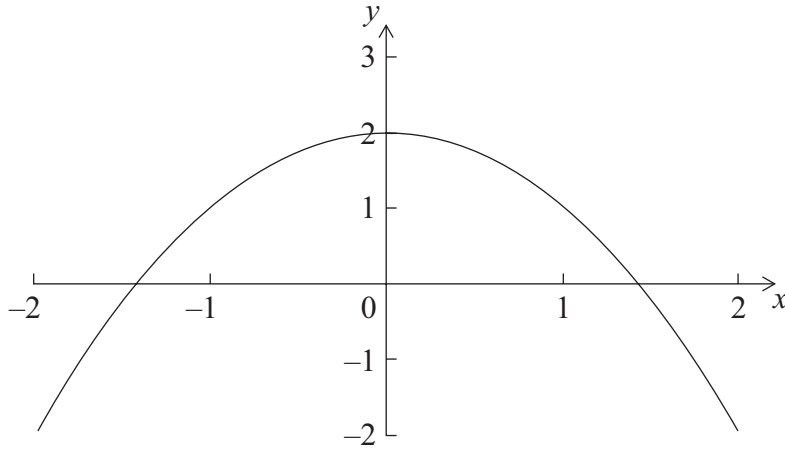
.....

.....



5. [Puntuación máxima: 7]

Sean $f(x) = 2 - x^2$, para $-2 \leq x \leq 2$ y $g(x) = \text{sen } e^x$, para $-2 \leq x \leq 2$. A continuación se muestra la gráfica de f .



(a) En el diagrama anterior, dibuje aproximadamente la gráfica de g . [3 puntos]

(b) Resuelva $f(x) = g(x)$. [2 puntos]

(c) Escriba el conjunto de valores de x tales que $f(x) > g(x)$. [2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

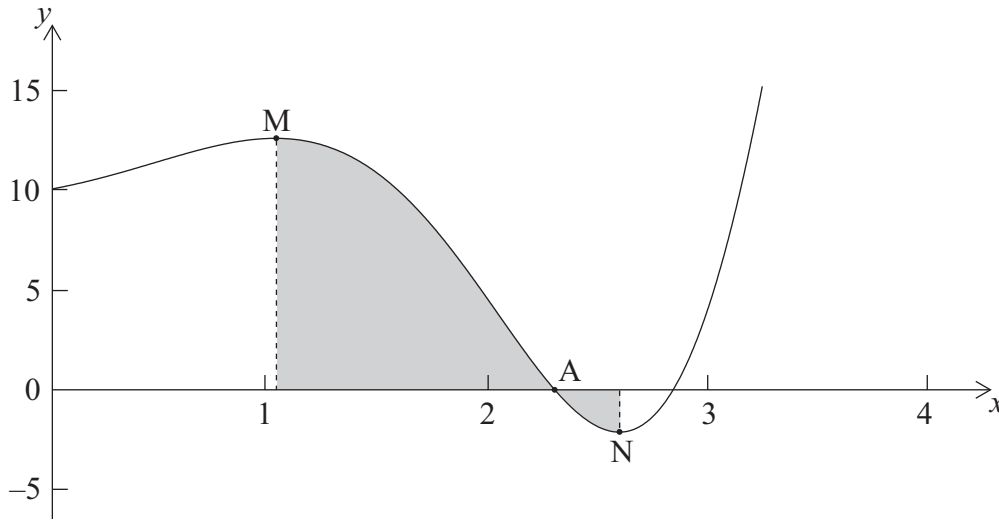
.....

.....



6. [Puntuación máxima: 6]

Sea $f(x) = e^x \sin 2x + 10$, para $0 \leq x \leq 4$. La figura que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de f .



Hay una intersección con el eje x en el punto A, un máximo local en el punto M, en el $x = p$, y un mínimo local en el punto N, en el que $x = q$.

- (a) Escriba la coordenada x del punto A. [1 punto]

- (b) Halle el valor de
 - (i) p ;
 - (ii) q . [2 puntos]

- (c) Halle $\int_p^q f(x) dx$. Explique por qué este valor no es el área de la región sombreada. [3 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 8]

El número n de bacterias que hay en un plato en el instante t minutos viene dado por $n = 800e^{0,13t}$.

- (a) Halle el valor de n para $t = 0$. [2 puntos]
- (b) Halle la tasa de variación a la que está aumentando n en el instante $t = 15$. [2 puntos]
- (c) Transcurridos k minutos, la tasa de incremento de n es mayor que 10000 bacterias por minuto. Halle el valor mínimo de k , donde $k \in \mathbb{Z}$. [4 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



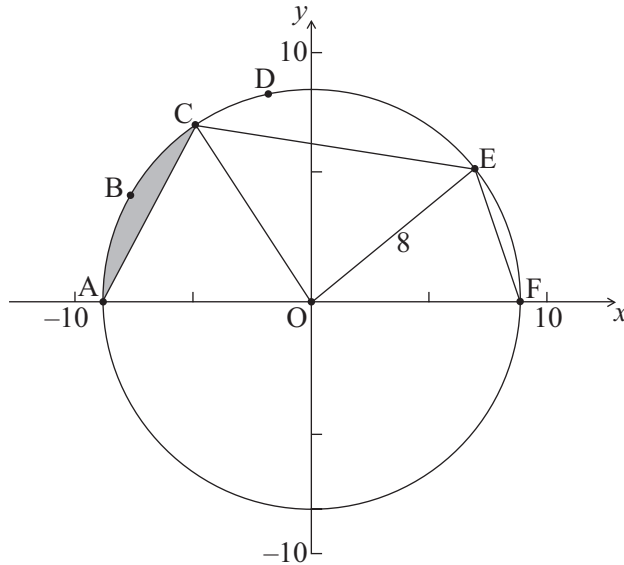
NO escriba en esta página.

SECCIÓN B

Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.

8. [Puntuación máxima: 15]

La siguiente figura muestra una circunferencia de centro O y radio 8 cm.



la figura no está dibujada a escala

Los puntos A, B, C, D, E y F pertenecen a la circunferencia, y [AF] es un diámetro. La longitud del arco ABC es de 6 cm.

(a) Halle el valor del ángulo AOC. [2 puntos]

(b) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. [6 puntos]

El área del sector circular OCDE es de 45 cm².

(c) Halle el valor del ángulo COE. [2 puntos]

(d) Halle EF. [5 puntos]



NO escriba en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

En esta pregunta, las distancias vienen dadas en metros.

Los aviones de juguete vuelan en línea recta y a velocidad constante. El Avión 1 pasa por un punto A. Su posición, p segundos después de haber pasado por A, viene dada

$$\text{por } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Escriba las coordenadas de A.

(ii) Halle la velocidad del avión en ms^{-1} .

[4 puntos]

(b) Después de siete segundos, el avión pasa por un punto B.

(i) Halle las coordenadas de B.

(ii) Halle la distancia que ha recorrido el avión durante estos siete segundos.

[5 puntos]

(c) El Avión 2 pasa por un punto C. Su posición, q segundos después de pasar

$$\text{por C, viene dada por } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

El ángulo que forman las direcciones de vuelo del Avión 1 y del Avión 2 es de 40° . Halle los dos valores de a .

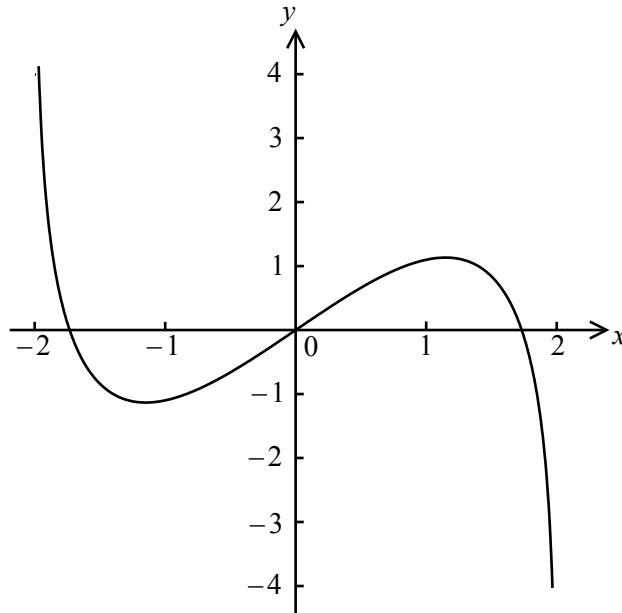
[7 puntos]



NO escriba en esta página.

10. [Puntuación máxima: 14]

Considere $f(x) = x \ln(4 - x^2)$, para $-2 < x < 2$. A continuación se muestra la gráfica de f .



- (a) Sean P y Q puntos pertenecientes a la curva de f en los cuales la tangente a la gráfica de f es paralela al eje x .
 - (i) Halle la coordenada x de P y de Q.
 - (ii) Considere $f(x) = k$. Escriba todos los valores de k para los cuales existen exactamente dos soluciones. [5 puntos]

Sea $g(x) = x^3 \ln(4 - x^2)$, para $-2 < x < 2$.

- (b) Compruebe que $g'(x) = \frac{-2x^4}{4 - x^2} + 3x^2 \ln(4 - x^2)$. [4 puntos]
- (c) Dibuje aproximadamente la gráfica de g' . [2 puntos]
- (d) Considere $g'(x) = w$. Escriba todos los valores de w para los cuales existen exactamente dos soluciones. [3 puntos]

